

温度场下功能梯度圆锥壳-环板振动特性分析

左朋^{1,2}, 石先杰¹

(1. 中国工程物理研究院 总体工程研究所, 四川 绵阳 621999; 2. 中国科学技术大学 近代力学系, 安徽 合肥 230026)

摘要:针对功能梯度圆锥壳-环板组合结构振动问题, 本文采用一阶剪切变形理论和 Rayleigh-Ritz 法分析了温度场下组合结构的振动特性。组合结构位移变量采用谱几何法来表征, 考虑材料参数与温度相关并引入人工边界弹簧建立了组合结构振动特性分析模型。数值算例中, 通过将文中求解结果与文献解和有限元法结果进行对比验证了模型的正确性, 进而分析尺寸、材料、温度和连接位置等参数对结构振动特性的影响。研究表明: 组合结构基频随厚度增加而增加, 随着幂律指数、半顶角和温度场参数增加而降低, 随环板内径和连接位置变化会呈现非单一变化趋势。

关键词:谱几何法; 温度场; 功能梯度结构; 圆锥壳-环板组合结构; 自由振动; 一阶剪切变形理论; 边界弹簧; 结构基频

DOI: 10.11990/jheu.202205046

网络出版地址: <https://link.cnki.net/kcms/detail/23.1390.U.20240206.1032.002>

中图分类号: TH212 文献标志码: A 文章编号: 1006-7043(2024)04-0709-08

Vibration characteristics of a functionally graded material conical shell-annular plate combined structure under a temperature field

ZUO Peng^{1,2}, SHI Xianjie¹

(1. Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, China; 2. Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: Herein, the vibration characteristics of a functionally graded material conical shell-annular plate combined structure under a temperature field are analyzed on the basis of the first-order shear deformation theory and Rayleigh-Ritz method. The displacement variables of the combined structure are represented using the spectro-geometric method, and a vibration analysis model considering temperature-related material parameters is established. The boundary conditions are simulated by introducing artificial boundary springs. In the numerical examples, the accuracy of the vibration analysis model is verified by comparing it with literature solutions and finite element solutions. The effects of parameters such as size, material, temperature and connection position on the vibration characteristics of the combined structure are then analyzed. The results show that the fundamental frequency of the combined structure increases with the increase in thickness and decreases with the increase in power law index, semiapex angle, and temperature field parameters. It also presents a nonsingle variation trend as the inner diameter and connection position of the annular plate change.

Keywords: spectro-geometric method; temperature field; functionally graded material; conical shell-annular plate combined structure; free vibration; first-order shear deformation theory; boundary spring; fundamental frequency

功能梯度材料 (functionally graded material,

FGM) 通常由陶瓷和金属组成的混合物制成, 以获得在一个或多个空间方向上具有渐变特性的功能性能。圆锥壳、环板以及圆锥壳-环板组合结构在火箭、飞行器、潜艇等装备中被广泛应用, 例如飞行器头部、潜艇艇部等。因此, FGM 圆锥壳-环板组合结构振动特性逐渐成为学者们的研究热点, 并在过去

收稿日期: 2022-05-13.

网络出版日期: 2024-02-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51975547, 52375136); 中国工程物理研究院院长基金项目 (YZJLX2018008).

作者简介: 左朋, 男, 博士研究生;

石先杰, 男, 高级工程师.

通信作者: 石先杰, E-mail: 411shixj@caep.cn.

几十年里取得了较为显著的成果,并提出了一系列数值解法,如改进傅里叶级数法^[1-5]、拟格林函数法^[6]、微分求积法^[7-10]以及无网格法^[11]等。

此外,功能梯度材料克服了传统材料的缺陷,具有耐高温性能。因此,温度场作用下的 FGM 结构振动特性研究也一直是研究热点。Malekzadeh 等^[12]采用微分求积法求解了热力控制方程,获得了温度场影响下的 FGM 圆锥壳三维自由振动特性。在二维弹性理论以及 Hamilton 变分原理框架内,滕兆春等^[13-14]推导了温度场作用下 FGM 薄环板面内自由振动控制方程,并采用微分求积法有效地求解了环板结构的振动频率特性。吕朋等^[15]在平面弹性理论框架内推导了温度场影响下 FGM 薄环板的面内振动能量方程,并应用改进傅里叶级数法求解获得了面内自由振动特性。考虑沿厚度方向的非线性温度分布,Mirtalaie^[16]在经典板壳理论基础上,推导并建立了 FGM 薄环扇形板自由振动控制微分方程,并用微分求积法求解获得了自由振动特性。在一阶剪切变形理论框架下,Chen 等^[17]分别采用切比雪夫多项式和傅里叶级数表示壳段和环板的位移函数,研究了温度场影响下 FGM 阶梯圆柱壳-环板组合结构的振动特性。

综上所述,现有大多数研究是针对单一的圆锥壳或者环板结构振动问题,关于圆锥壳-环板组合结构的振动特性研究却少有涉及。随着产品结构朝着轻量化方向发展,FGM 结构的轻量化和力学性能可设计等显著特征使得 FGM 圆锥壳-环板组合结构在火箭、飞行器等回转类装备结构设计中得到广泛应用。

本文考虑材料参数与温度相关,在一阶剪切变形理论框架内推导获得了 FGM 圆锥壳以及环板结

构的能量方程表达式。利用人工边界弹簧模拟圆锥壳、环板的边界约束条件及组合连接关系。采用谱几何法建立了温度场影响下 FGM 圆锥壳-环板组合结构振动特性分析模型。在数值算例中,通过将本文求解结果与文献解和有限元法结果进行对比,验证了所构建模型的正确性,并进一步分析了相关重要参数对 FGM 圆锥壳-环板组合结构自由振动特性的影响规律。

1 FGM 圆锥壳-环板组合结构振动分析模型

1.1 FGM 圆锥壳以及环板结构能量方程

图 1(a)和(b)分别是 FGM 圆锥壳以及环板结构模型示意图,其中环板是圆锥壳半顶角 $\theta=90^\circ$ 时的特殊情形。其中 O 为坐标原点,符号 $\zeta=c$, a 为表示圆锥壳以及环板结构, $(\alpha_\zeta, \beta_\zeta, z_\zeta)$ 为建立在对应该结构的中性面 $z_\zeta=0$ 处的正交坐标系。 h 为结构沿 z_ζ 方向的厚度, L_c 为圆锥壳结构沿 α_c 方向的长度。 R_{0c} 和 R_{1c} 分别为圆锥壳的小端圆半径以及环板的外径,而 R_{1c} 和 R_{1a} 则分别为圆锥壳的大端圆半径以及环板的外径。 $U_\zeta=(U_\zeta, V_\zeta, W_\zeta)^T$ 上任一点沿 $(\alpha_\zeta, \beta_\zeta, z_\zeta)$ 方向的位移。基于一阶剪切变形理论,位移变量为:

$$\begin{bmatrix} U_\zeta(\alpha, \beta, z, t) \\ V_\zeta(\alpha, \beta, z, t) \\ W_\zeta(\alpha, \beta, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_\zeta(\alpha, \beta, t) \\ v_\zeta(\alpha, \beta, t) \\ w_\zeta(\alpha, \beta, t) \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha\zeta}(\alpha, \beta, t) \\ \varphi_{\beta\zeta}(\alpha, \beta, t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: $u_\zeta=[u_\zeta, v_\zeta, w_\zeta, \varphi_{\alpha\zeta}, \varphi_{\beta\zeta}]^T$ 为结构中性面处的位移向量,其中 $[u_\zeta, v_\zeta, w_\zeta]^T$ 表示的是沿 $[\alpha_\zeta, \beta_\zeta, z_\zeta]$ 方向的平移位移,而 $[\varphi_{\alpha\zeta}, \varphi_{\beta\zeta}]^T$ 则对应的是绕 β 和 α 轴的旋转位移。

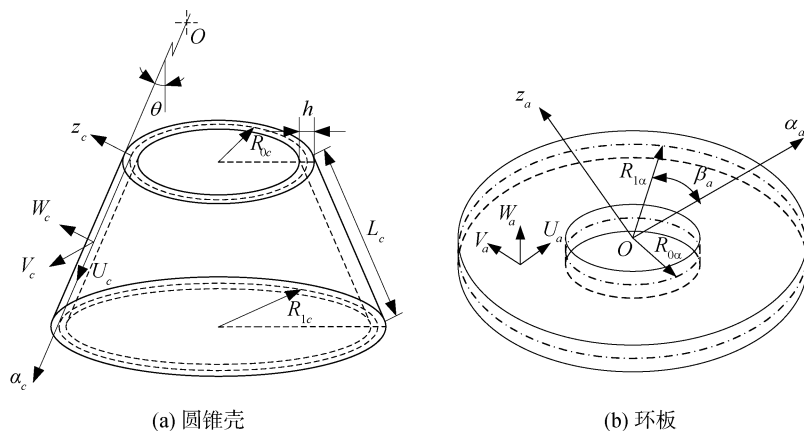


图 1 圆锥壳以及环板结构模型

Fig. 1 Schematic diagram of the conical shell and annular plate structure

基于小变形理论和线性应变-位移关系,结构上任意点的应变分量($\varepsilon_{\alpha\zeta}$, $\varepsilon_{\beta\zeta}$, $\gamma_{\alpha\beta\zeta}$, $\gamma_{\alpha\zeta}$, $\gamma_{\beta\zeta}$)为:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\zeta} = \varepsilon_{\alpha\zeta}^0 + \chi_{\alpha\zeta}, \varepsilon_{\beta\zeta} = \varepsilon_{\beta\zeta}^0 + \chi_{\beta\zeta} \\ \gamma_{\alpha\beta\zeta} = \gamma_{\alpha\beta\zeta}^0 + \chi_{\alpha\beta\zeta}, \gamma_{\alpha\zeta} = \varphi_{\alpha\zeta} + \frac{\partial w_\zeta}{\partial \alpha} \\ \gamma_{\beta\zeta} = \varphi_{\beta\zeta} - \frac{v_\zeta}{R_\beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial w_\zeta}{\partial \beta} \end{cases} \quad (2)$$

式中: A 和 R_β 分别代表拉梅系数和曲率半径,对于圆锥壳和环板结构,取值分别为:圆锥壳: $A = R_{0c} + \alpha_c \sin \theta$ 和 $R_\beta = \alpha_c \tan \theta + R_{0c} / \cos \theta$;环板: $A = R_{0a} + \alpha_a$ 和 $R_\beta = \infty$ 。而 $\varepsilon_\zeta^0 = [\varepsilon_{\alpha\zeta}^0, \varepsilon_{\beta\zeta}^0, \gamma_{\alpha\beta\zeta}^0]^T$ 为中性面处的膜应变向量, $\chi_\zeta = [\chi_{\alpha\zeta}, \chi_{\beta\zeta}, \chi_{\alpha\beta\zeta}]^T$ 为曲率变化向量,具体表达式参见文献[18]。

根据 FGM 板壳结构的力和力矩方程,可以得到矩阵形式表达式:

$$\begin{cases} N_\zeta = A\varepsilon_\zeta^0 + B\chi_\zeta, M_\zeta = B\varepsilon_\zeta^0 + D\chi_\zeta \\ Q_{s\zeta} = \kappa A_s \gamma_\zeta, \gamma_\zeta = (\gamma_{\alpha\zeta}, \gamma_{\beta\zeta})^T \end{cases} \quad (3)$$

式中, $N_\zeta = [N_{\alpha\zeta}, N_{\beta\zeta}, N_{\alpha\beta\zeta}]^T$ 是结构的面内合力向量, $M_\zeta = [M_{\alpha\zeta}, M_{\beta\zeta}, M_{\alpha\beta\zeta}]^T$ 对应的是结构的力矩向量,而 $Q_{s\zeta} = [Q_{\alpha\zeta}, Q_{\beta\zeta}]^T$ 表示的是横向剪切力向量。 $\kappa = 5/6$ 为剪切修正参数。 A 、 B 和 D 为拉伸、拉伸-弯曲组合和弯曲刚度参数 A_{jk} 、 B_{jk} 和 D_{jk} 组成的矩阵,具体表达式参见文献[18]。 A_{jk} 、 B_{jk} 和 D_{jk} 为:

$$(A_{jk}, B_{jk}, D_{jk}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{jk}(z, T) (1, z, z^2) dz \quad (4)$$

式中: Q_{ij} 是材料刚度系数,为厚度 z 和温度 T 的函数,并与材料弹性模量 E 、泊松比 μ 等参数有关,其表达式参见文献[19]。此外,本文研究还涉及到热膨胀系数 α_T 以及质量密度 ρ 等材料参数,上述材料参数 C 与温度 T 的关系为:

$$C(T) = C_0(C_{-1}T^{-1} + 1 + C_1T + C_2T^2 + C_3T^3) \quad (5)$$

式中: C_0 、 C_{-1} 、 C_1 、 C_2 和 C_3 为温度相关系数,材料不同,其取值也各不相同。另外,功能梯度材料通常由 2 种材料混制而成,其材料参数 C 与厚度方向 z 关系为:

$$C(z, T) = [C_{z1}(T) - C_{z0}(T)] \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + C_{z0}(T) \quad (6)$$

式中: p 为材料的幂律指数; C_{z0} 和 C_{z1} 分别为圆锥壳内表面(或者环板下表面)以及圆锥壳外表面(或者环板上表面)的材料参数。

基于线弹性理论,FGM 圆锥壳以及环板的结构势能 $U_{p\zeta}$ 为:

$$U_{p\zeta} = \iint_S \frac{A}{2} (N_\zeta^T \varepsilon_\zeta^0 + M_\zeta^T \chi_\zeta + Q_{s\zeta}^T \gamma_\zeta) d\beta d\alpha \quad (7)$$

由于本文考虑了温度环境对结构动力学特性的

影响,因此需要考虑引入温度场时所产生的附加热势能 $U_{T\zeta}$,为:

$$U_{T\zeta} = - \iiint_V \frac{A}{2} \left\{ (Q_{11} + Q_{22}) \alpha_T \Delta T \left[\left(\frac{\partial w_\zeta}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_\zeta}{\partial \beta} \right)^2 \right] \right\} dz d\beta d\alpha \quad (8)$$

式中 $\Delta T = T - T_0$ 表示的是结构温度值 T 与参考温度值 T_0 之间的温度变化值。

相应地,FGM 圆锥壳以及环板的结构动能 $T_{K\zeta}$ 为:

$$T_{K\zeta} = \iiint_V \frac{A}{2} [\rho(z, T) U_\zeta^T U_\zeta] dz d\beta d\alpha \quad (9)$$

1.2 组合结构能量方程及求解

在获得 FGM 圆锥壳以及环板结构能量方程的基础上,进一步建立温度场下 FGM 圆锥壳-环板组合结构的振动特性分析模型,如图 2 所示,其中符号 p_c 表示的是环板在圆锥壳上的连接位置,故有 $R_{1a} = R_{0c} + p_c \sin \theta$ 。

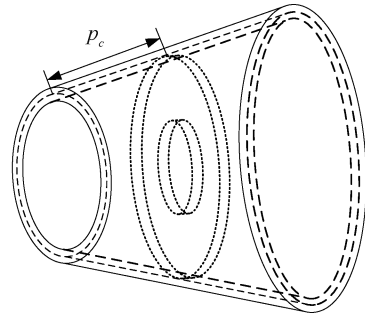


图 2 圆锥壳-环板组合结构模型

Fig. 2 Schematic diagram of the conical shell-annular plate combined structure

本文采用人工边界弹簧模拟圆锥壳、环板的边界约束条件以及组合连接条件^[18]。用下标 0、1 和 a_0 分别对应圆锥壳小端边界、圆锥壳大端边界和环板内边界,组合结构的边界势能 V_B 为:

$$V_B = \int_0^{2\pi} \frac{A}{2} \left\{ (u_c^T k_0 u_c)_{\alpha=R_{0c}/\sin \theta} + (u_c^T k_1 u_c)_{\alpha=R_{0c}/\sin \theta + L_c} + (u_a^T k_{a0} u_a)_{\alpha=R_{0a}} \right\} d\beta \quad (10)$$

其中, $k = \text{diag}(k_u, k_v, k_w, k_\alpha, k_\beta)$ 分别为约束位移分量 $u_\zeta = [u_\zeta, v_\zeta, w_\zeta, \varphi_{\alpha\zeta}, \varphi_{\beta\zeta}]^T$ 的弹簧刚度值。

下标 c 为耦合位置处的弹簧刚度,则组合结构的耦合势能 V_c 为:

$$V_c = \int_0^{2\pi} \frac{A}{2} [k_{cu} (u_a |_{\alpha=R_{1a}} - w_c |_{\alpha=R_{0c}/\sin \theta + p_c} \cos \theta)^2 + k_{cv} (v_a |_{\alpha=R_{1a}} + v_c |_{\alpha=R_{0c}/\sin \theta + p_c})^2 + k_{cw} (w_a |_{\alpha=R_{1a}} - (u_c - w_c)_{\alpha=R_{0c}/\sin \theta + p_c} \cos \theta)^2 + k_{c\alpha} (\varphi_{\alpha a} |_{\alpha=R_{1a}} - \varphi_{\alpha c} |_{\alpha=R_{0c}/\sin \theta + p_c})^2 + k_{c\beta} (\varphi_{\beta a} |_{\alpha=R_{1a}} - \varphi_{\beta c} |_{\alpha=R_{0c}/\sin \theta + p_c})^2] d\beta \quad (11)$$

式中： k_{cu} 、 k_{cv} 、 k_{cw} 为约束平移位移的线性耦合弹簧刚度值； $k_{c\alpha}$ 、 $k_{c\beta}$ 为约束旋转位移的扭转耦合弹簧刚度值。

综上，温度场下 FGM 圆锥壳-环板组合结构的拉格朗日能量方程为：

$$\Xi = \sum_{\zeta}^{c,a} T_{K\zeta} - \sum_{\zeta}^{c,a} U_{p\zeta} - \sum_{\zeta}^{c,a} U_{T\zeta} - V_B - V_c \quad (12)$$

由于圆锥壳以及环板结构位移向量在周向方向上对称，可将其沿 β 方向的位移分量采用正余弦级数展开，同时将其沿 α 方向的位移分量采用谱几何法^[20]展开，位移向量展开式进而可表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\zeta} = \mathbf{v}_{\zeta} = \mathbf{w}_{\zeta} = \boldsymbol{\varphi}_{\alpha\zeta} = \boldsymbol{\varphi}_{\beta\zeta} = & \\ & \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \cos \lambda_m \alpha (A_{mn}^{p,c} \cos(n\beta) + A_{mn}^{p,s} \sin(n\beta)) \right) + \\ & \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^N \chi_l(\alpha) (A_{ln}^{p,c_1} \cos(n\beta) + A_{ln}^{p,s_1} \sin(n\beta)) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (13)$$

式中： $\lambda_m = m\pi/L_{\zeta}$ ($L_{\zeta} = L_c$ 或者 $R_{1a} - R_{0a}$)； M 和 N 分别为在 α 和 β 方向上位移函数的级数截断数； $A_{mn}^{p,b}$ ($p = u_{\zeta}, v_{\zeta}, w_{\zeta}, \varphi_{\alpha\zeta}, \varphi_{\beta\zeta}$ ； $b = c, s$) 是位移向量未知级数展开系数，而 A_{ln}^{p,b_1} ($b_1 = c_1, s_1$) 为辅助函数系数； $\chi_l(\alpha)$ 则为在 α 方向积分域内足够光滑的辅助函数。

将式(13)代入式(12)，并采用 Rayleigh-Ritz 法^[20-21]对未知级数展开系数求偏导，即可获得温度场下 FGM 圆锥壳-环板组合结构振动分析模型：

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (14)$$

式中： \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别表示组合结构的刚度矩阵和质量矩阵； \mathbf{H} 为未知级数展开系数向量矩阵。

2 数值算例与分析

本文利用振动分析模型进行温度场作用下 FGM 圆锥壳-环板组合结构自由振动特性分析。由于参考文献[18]中对弹簧刚度值的收敛性进行了充分分析，因此本文将组合结构单位长度的弹簧刚度值设为： $k_{cu} = k_{cv} = k_{cw} = k_{c\alpha} = k_{c\beta} = 10^{14}$ N/m。本文可以通过设置不同弹簧刚度实现与之对应的边界条件，其中自由 F 、第 1 种简支 S_1 、第 2 种简支 S_2 以及固支 C 边界条件的弹簧刚度值设置如表 1 所示。用横线连接字符的形式来表示组合结构所受到的边界条件，如 $C-S_1-F$ 表示组合结构的左边界为固支，右边界为第 1 种简支，环板内边界为自由。此外，除非特殊说明，本文 FGM 圆锥壳-环板组合结构几何参数设置为： $h = 0.05$ m， $\theta = 30^\circ$ ， $R_{0c} = 0.5$ m， $L_c = 4$ m， $R_{0a} = 0.2$ m， $p_c = L_c/2$ ；温度场参数设置为：参考温度值 $T_0 = 300$ K，结构温度值 $T = 300$ K。

表 1 不同边界条件对应的每组边界弹簧的刚度值

Table 1 The stiffness values for each group boundary restraining springs corresponding to different boundary conditions

边界	k_u	k_v	k_w	k_{α}	k_{β}
F	0	0	0	0	0
S_1	0	10^{14}	10^{14}	0	0
S_2	10^{14}	10^{14}	10^{14}	0	10^{14}
C	10^{14}	10^{14}	10^{14}	10^{14}	10^{14}

2.1 模型验证

图 3 所示为 $C-C-C$ 边界下圆锥壳-环板组合结构在不同级数截断数 M 下第 1、2、4、6 阶的频率参数收敛曲线。圆锥壳内表面以及环板下表面的材料为金属 304 不锈钢，圆锥壳外表面以及环板上表面的材料为陶瓷氮化硅，幂律指数 $p = 1$ ，材料温度相关系数见文献[19]。图中截断误差的定义为取 $M = 30$ 下的频率结果为参考值，其他级数截断数下的频率结果与参考值之间误差的绝对值。通过图 3 可知，各阶频率参数的截断误差在 $M = 24$ 后便基本保持不变，此时计算结果已经趋于收敛。因此，在后续算例中，截断数统一选取为 $M = 26$ 。

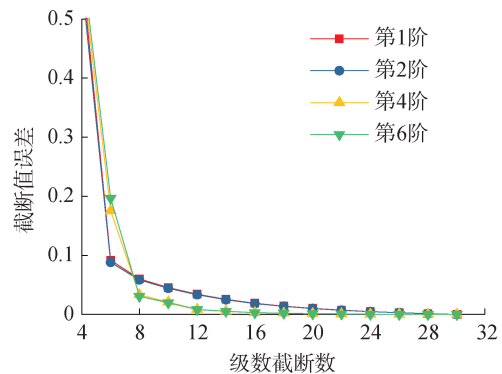


图 3 不同级数截断数 M 对 FGM 圆锥壳-环板组合结构自由振动频率的影响规律

Fig. 3 The influence of different truncation numbers M on the free vibration frequency of FGM conical shell-annular plate combined structure

表 2 所示为不考虑温度场影响下圆柱壳-环板组合结构在 $C-F-C$ 、 $F-F-F$ 以及 S_1-F-S_1 边界条件下前 6 阶固有频率参数。组合结构采用均匀各向同性材料，具体参数为：杨氏模量 $E = 2.06 \times 10^{11}$ Pa，泊松比 $\mu = 0.3$ ，密度 $\rho = 7850$ kg/m³；结构几何尺寸参数为： $h = 0.003$ m， $\theta = 0^\circ$ ， $R_{0c} = 0.1045$ m， $L_c = 0.5$ m， $R_{0a} = 0.03$ m， $p_c = L_c$ 。作为对比，文献结果[22]以及有限元法结果也在表 2 中给出，并进行了无量纲化处理 $\Omega = \omega R_{0c} \sqrt{\rho(1 - \mu^2)}/E$ 。表 2 中的对比结果表明，尽管计算方法存在差异，但三者之间吻合较好。

表 2 圆柱壳-环板组合结构的前 6 阶无量纲固有频率对比

Table 2 Comparisons of the first sixth dimensionless natural frequencies for cylindrical shell-annual plate combined structures

边界	方法	阶次					
		1	2	3	4	5	6
C-F-C	本文方法	0.089 3	0.110 8	0.129 4	0.171 3	0.179 2	0.199 7
	文献[22]方法	0.089 1	0.110 8	0.129 6	0.171 5	0.179 6	0.200 3
	有限元	0.088 9	0.110 5	0.129 4	0.171 0	0.178 9	0.199 9
F-F-F	本文方法	0.023 0	0.063 4	0.083 1	0.094 5	0.120 7	0.124 9
	文献[22]方法	0.022 7	0.063 4	0.083 4	0.094 0	0.121 0	0.124 6
	有限元	0.022 6	0.063 3	0.082 9	0.093 9	0.120 8	0.124 6
S ₁ -F-S ₁	本文方法	0.010 0	0.078 0	0.085 1	0.126 1	0.161 4	0.162 5
	文献[22]方法	0.010 1	0.077 8	0.084 8	0.126 2	0.161 1	0.162 2
	有限元	0.010 0	0.077 7	0.084 8	0.126 1	0.161 0	0.162 1

表 3 所示为考虑温度场影响的 FGM 圆锥壳-环板组合结构在 C-C-C、C-F-C 以及 S₂-S₂-C 边界下前 7 阶固有频率参数。材料参数及温度相关系数与图 3 算例保持一致,幂律指数 $p=1,2$ 。由于此类 FGM 组合结构振动特性研究的公开文献较少,因此仅与有限元法结果进行比较分析,通过对比可以发现,本文方法的计算结果与有限元法结果吻合较好。为了

更好地展现本文方法有效性和适用性,图 4 给出了 C-F-C 边界下组合结构模态振型对比情况。从图 4 可以看出,本文方法不仅可以准确预测固有频率参数,还可以获得结构模态振型。综上所述,本文构建的 FGM 圆锥壳-环板组合结构振动分析模型能够有效预测温度场作用下 FGM 圆锥壳-环板组合结构的自由振动特性。

表 3 温度场影响下 FGM 圆锥壳-环板组合结构前 7 阶频率结果对比

Table 3 Comparisons of the first seventh frequency results for the conical shell-annual plate combined structure under the influence of temperature field

边界	p	方法	阶次						
			1	2	3	4	5	6	7
C-C-C	1	本文方法	203.61	214.46	232.79	240.79	248.39	262.70	275.20
		有限元	201.18	211.98	233.52	241.35	249.63	260.12	275.68
	2	本文方法	182.71	192.44	207.68	214.20	222.20	235.73	244.29
		有限元	181.18	190.90	208.97	215.32	224.03	234.27	245.42
C-F-C	1	本文方法	59.553	65.179	79.297	87.125	92.512	110.779	118.89
		有限元	59.275	65.096	79.001	87.381	92.193	110.54	119.60
	2	本文方法	52.999	58.315	70.296	78.152	81.904	98.156	106.73
		有限元	52.904	58.434	70.224	78.655	81.868	98.229	107.75
S ₂ -S ₂ -C	1	本文方法	203.60	214.46	217.69	227.64	231.83	262.70	264.39
		有限元	201.18	211.98	221.15	230.37	235.91	260.12	266.10
	2	本文方法	182.70	192.43	193.97	202.25	207.18	234.47	235.83
		有限元	181.18	190.90	197.81	205.41	211.66	234.27	236.76

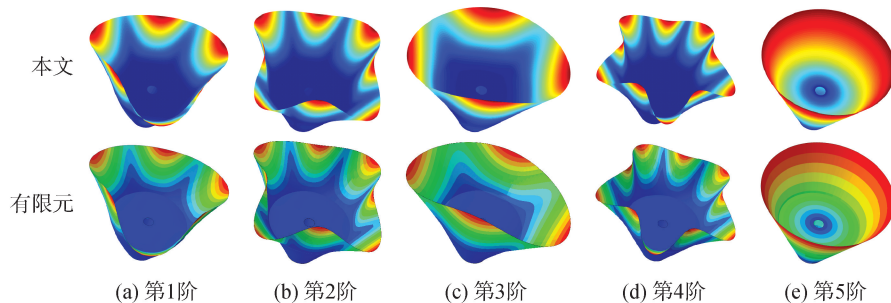


图 4 温度场影响下 FGM 圆锥壳-环板组合结构前 5 阶模态振型对比

Fig. 4 Comparisons of the first fifth mode shapes for the conical shell-annual plate combined structures under the influence of temperature field

2.2 参数研究

在验证本文构建分析模型有效性基础上,开展了 FGM 圆锥壳-环板组合结构自由振动特性参数化研究。

图 5 所示为结构厚度 h 以及材料幂律指数 p 对 FGM 圆锥壳-环板组合结构基频的影响规律。 h 的变化区间为 $[0.02 \text{ m}, 0.1 \text{ m}]$, p 从 0 递增至 10, 边界条件定义为: $C-C-C$ 、 $C-C-S_2$ 以及 $C-C-S_1$, 其余结构参数以及温度场的设置均与默认参数保持一致。从图 5 可知, 结构基频随厚度 h 的增加可以明显提高, 而随着幂律指数 p 的递增会呈现下降的趋势。

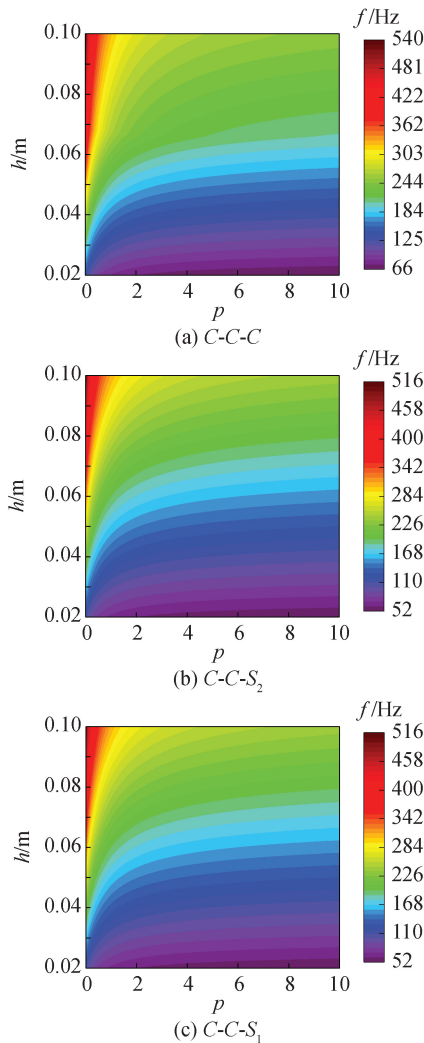


图 5 结构厚度 h 和材料幂律指数 p 的变化对 FGM 圆锥壳-环板组合结构基频的影响规律

Fig. 5 The influence of thickness h and material power-law exponent p on the fundamental frequency of FGM conical shell-annual plate combined structure

图 6 所示为环板内径 R_{0a} 以及结构温度值 T 的变化对 $C-C-C$ 、 $C-C-S_2$ 以及 $C-C-S_1$ 边界下 FGM 圆锥壳-环板组合结构基频的影响规律。 R_{0a} 从

0.05 m 递增至 0.5 m, T 从 300 K 变化至 400 K, 其余参数与图 4 算例参数保持一致。从图 6 可以看出, 保持参考温度值 T_0 不变, 结构基频随着温度值 T 的增加而逐渐降低, 随着环板内径 R_{0a} 的递增会呈现先显著增大后缓慢变化的趋势。

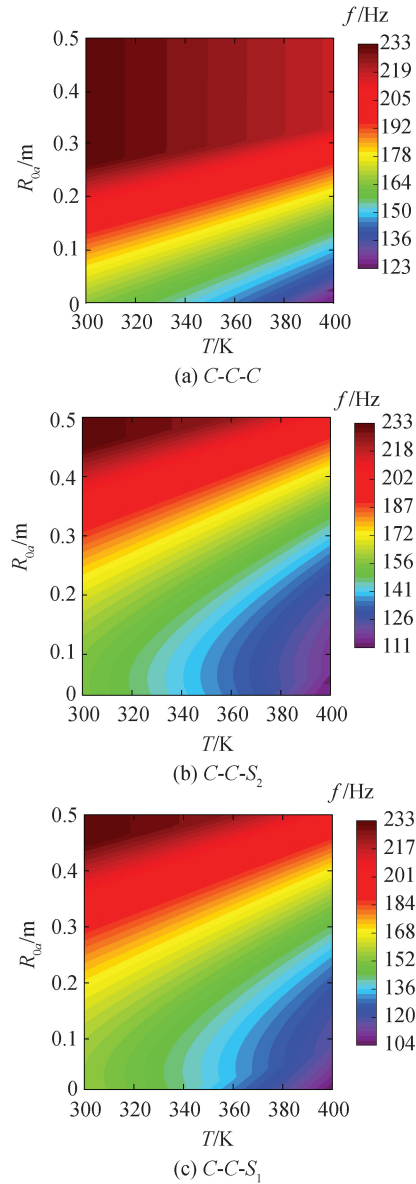


图 6 环板内径 R_{0a} 和结构温度值 T 的变化对 FGM 圆锥壳-环板组合结构基频的影响规律

Fig. 6 The influence of inner diameter R_{0a} and temperature value T on the fundamental frequency of FGM conical shell-annual plate combined structure

图 7 所示为圆锥壳半顶角 θ 以及环板组合连接位置 p_c 的变化对 $C-C-C$ 、 $C-C-S_2$ 以及 $C-C-S_1$ 边界下 FGM 圆锥壳-环板组合结构基频的影响规律。半顶角 θ 的变化区间为 $[30^\circ, 60^\circ]$, p_c 从 1 m 向右移动至 3 m, 其余参数与图 4 算例保持一致。从图 7 可以看出, 圆锥壳半顶角 θ 的增加会降低组合结构基频。而随着环板组合连接位置 p_c 向右移

动,组合结构基频会呈现先上升后下降的趋势,在 $C-C-C$ 边界条件下,基频在 $p_c = 1.9$ m 时达到最大,而对于 $C-C-S_2$ 和 $C-C-S_1$ 边界条件而,基频最大值出现在 $p_c = 1.7$ m 时。

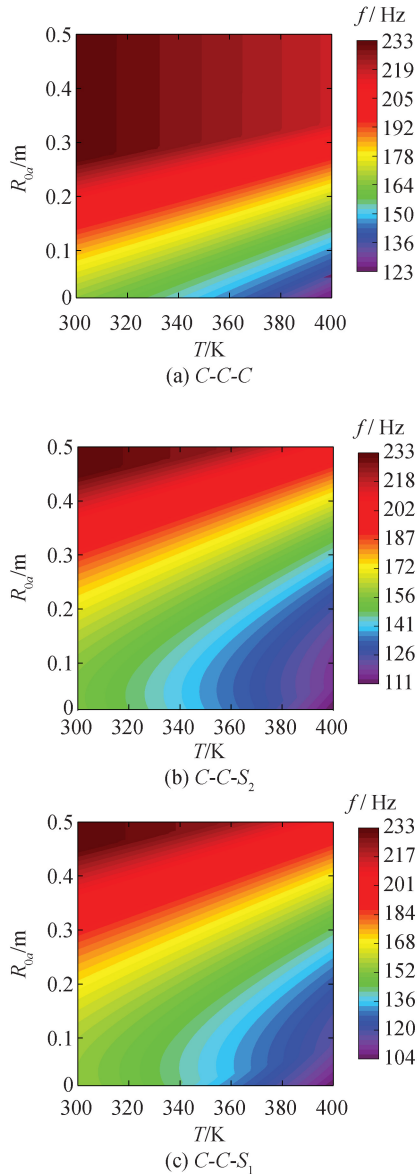


图7 半顶角 θ 和组合位置 p_c 的变化对 FGM 圆锥壳-环板组合结构基频的影响规律

Fig. 7 The influence of half apex angle θ and coupling position p_c on the fundamental frequency of FGM conical shell-annular plate combined structure

3 结论

1) 谱几何法具有良好收敛性和计算精度,且通用性好,当结构材料或者几何参数发生变化时,只需要修改相关初始参数即可,无需繁琐推导公式,简洁高效。

2) FGM 圆锥壳-环板组合结构基频随厚度增加会呈现上升趋势,随着幂律指数、半顶角和温度场参数增加会呈现下降变化趋势。

3) FGM 圆锥壳-环板组合结构基频随环板内径 R_{0a} 的递增会呈现先显著增大后缓慢变化的趋势,随环板组合连接位置 p_c 会呈现先上升后下降的趋势。

参考文献:

- [1] JIN Guoyong, SU Zhu, YE Tiangui, et al. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular sector plates with general boundary conditions [J]. Composites part B: engineering, 2015, 83: 352-366.
- [2] SU Zhu, JIN Guoyong, YE Tiangui. Three-dimensional vibration analysis of thick functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with arbitrary elastic restraints [J]. Composite structures, 2014, 118: 432-447.
- [3] ZHAO Jing, XIE Fei, WANG Ailun, et al. Dynamics analysis of functionally graded porous (FGP) circular, annular and sector plates with general elastic restraints [J]. Composites part B: engineering, 2019, 159: 20-43.
- [4] ZHAO Jing, ZHANG Yongkang, CHOE K, et al. Three-dimensional exact solution for the free vibration of thick functionally graded annular sector plates with arbitrary boundary conditions [J]. Composites part B: engineering, 2019, 159: 418-436.
- [5] 田宏业, 刘朋, 胡志宽, 等. 基于半解析法的功能梯度圆锥板自由振动特性 [J]. 船舶力学, 2021, 25(3): 351-359.
TIAN Hongye, LIU Peng, HU Zhikuan, et al. Free vibration characteristics of functionally graded conical plate based on semi-analytical method [J]. Journal of ship mechanics, 2021, 25(3): 351-359.
- [6] ŽUR K K. Free vibration analysis of elastically supported functionally graded annular plates via quasi-Green's function method [J]. Composites part B: engineering, 2018, 144: 37-55.
- [7] KUMAR Y. Free vibration of two-directional functionally graded annular plates using Chebyshev collocation technique and differential quadrature method [J]. International journal of structural stability and dynamics, 2015, 15(6): 1450086.
- [8] LIANG Xu, KOU Hailei, WANG Lizhong, et al. Three-dimensional transient analysis of functionally graded material annular sector plate under various boundary conditions [J]. Composite structures, 2015, 132: 584-596.
- [9] MOHAMMADIMEHR M, AFSHARI H, SALEMI M, et al. Free vibration and buckling analyses of functionally graded annular thin sector plate in-plane loads using GDQM [J]. Structural engineering and mechanics, 2019, 71(5): 525-544.
- [10] 滕兆春, 蒲育, 房晓林. FGM 圆环板面内自由振动的 DQM 求解 [J]. 北京理工大学学报, 2014, 34(12): 1211-1216, 1245.
TENG Zhaochun, PU Yu, FANG Xiaolin. DQM solution of free vibration in FGM ring plate [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2014, 34(12): 1211-1216, 1245.

- [11] LIEW K M, NG T Y, ZHAO X. Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method [J]. *Journal of sound and vibration*, 2005, 281 (3/4/5): 627-645.
- [12] MALEKZADEH P, FIOUZ A R, SOBHROUYAN M. Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment [J]. *International journal of pressure vessels and piping*, 2012, 89: 210-221.
- [13] 蒲育. 热环境中功能梯度圆环板的面内自由振动分析 [D]. 兰州: 兰州理工大学, 2013.
PU Yu. In-plane free vibration analysis of functionally graded annular plates under thermal environment [D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2013.
- [14] 滕兆春, 蒲育. 温度影响下 FGM 圆环板的面内自由振动分析 [J]. *振动与冲击*, 2015, 34(9): 210-217.
TENG Zhaochun, PU Yu. In-plane free vibration of FGM annular plates considering temperature effect [J]. *Journal of vibration and shock*, 2015, 34(9): 210-217.
- [15] 吕朋, 杜敬涛, 邢雪, 等. 热环境下弹性边界约束 FGM 圆环板面内振动特性分析 [J]. *振动工程学报*, 2017, 30(5): 713-723.
LYU Peng, DU Jingtao, XING Xue, et al. Analysis of in-plane vibration characteristics of FGM circular plate with elastic boundary constraints in thermal environment [J]. *Journal of vibration engineering*, 2017, 30(5): 713-723.
- [16] MIRTALAIE S H. Differential quadrature free vibration analysis of functionally graded thin annular sector plates in thermal environments [J]. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 2018, 140(10): 101006.
- [17] CHEN Zhengxiong, WANG Ailun, QIN Bin, et al. Investigation on vibration of the functionally graded material-stepped cylindrical shell coupled with annular plate in thermal environment [J]. *Journal of low frequency noise, vibration and active control*, 2022, 41(1): 85-111.
- [18] SU Zhu, JIN Guoyong, SHI Shuangxia, et al. A unified solution for vibration analysis of functionally graded cylindrical, conical shells and annular plates with general boundary conditions [J]. *International journal of mechanical sciences*, 2014, 80: 62-80.
- [19] LI Zhen, ZHONG Rui, WANG Qingshan, et al. The thermal vibration characteristics of the functionally graded porous stepped cylindrical shell by using characteristic orthogonal polynomials [J]. *International journal of mechanical sciences*, 2020, 182: 105779.
- [20] 石先杰. 复杂边界条件下旋转结构统一动力学模型的构建与研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2014.
SHI Xianjie. The construction and analysis on unified dynamical model of revolve structures subjected to complex boundary conditions [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2014.
- [21] 王青山. 任意边界条件下复合材料回转类中厚板壳及组合结构振动特性研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2016.
WANG Qingshan. Study of vibration characteristics for moderately thick plates and shells of revolution and coupled structures subjected to general boundary conditions [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2016.
- [22] MA Xianglong, JIN Guoyong, SHI Shuangxia, et al. An analytical method for vibration analysis of cylindrical shells coupled with annular plate under general elastic boundary and coupling conditions [J]. *Journal of vibration and control*, 2017, 23(2): 305-328.

本文引用格式:

左朋, 石先杰. 温度场下功能梯度圆锥壳-环板振动特性分析 [J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2024, 45(4): 709-716.

ZUO Peng, SHI Xianjie. Vibration characteristics of a functionally graded material conical shell-annular plate combined structure under a temperature field [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2024, 45(4): 709-716.